Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS DRB

Mathématiques du groupement C

Session 2014 • Code sujet : **MATGRC** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Pression exercée par les grains dans un silo (11 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité des bouteilles en PET (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsdrb.fr/assets/annales/bts-drb/E3 - Mathématiques et Sciences physiques/2014/BTS DRB - E3 - Mathématiques et Sciences physiques - Session 2014 - 1-Sujet.pdf

1. Pression exercée par les grains dans un silo

Dans une étude de sécurisation, la pression exercée au fond d'un silo cylindrique est modélisée en fonction de la hauteur de grains. L'exercice mobilise une équation différentielle, l'étude d'une fonction, la tangente et l'asymptote associées à l'effet de voûte, ainsi qu'un calcul de pression moyenne.

Partie 1

Question 1. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,175y = 0.

On écrit l'équation sous la forme $y'=-0,175y$. Une équation différentielle $y'=ry$ a pour solutions les fonctions Ce^{rx}, où C est une constante réelle. Ici, $r=-0,175$. Ces fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle demandé, [0 ; +∞[.

$y(x)=Ce^{-0,175x}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(x)=Ce^{-0,175x}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer le réel a pour lequel la fonction constante g, définie par g(x) = a, est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Si $g(x)=a$ est constante, alors $g'(x)=0$. En remplaçant y et y' dans (E), la condition pour être solution devient une équation du premier degré en a. On la résout en divisant le second membre par le coefficient de a.

$0,175a=8,365$, donc $a=8,365\div0,175=47,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a=47,8$.

Question 3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,175y = 8,365.

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène. La solution particulière constante est $47,8$, et le terme homogène est $Ce^{-0,175x}$. La constante réelle C peut prendre toute valeur.

$y(x)=47,8+Ce^{-0,175x}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(x)=47,8+Ce^{-0,175x}$, avec $C\in\mathbb{R}$.

Question 4. Déterminer la fonction p, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie p(0) = 0.

On utilise la solution générale et la condition initiale. À $x=0$, l'exponentielle vaut 1, donc $p(0)=47,8+C$. La condition $p(0)=0$ impose $C=-47,8$. On remplace ensuite cette constante dans la solution générale.

1. C=-47,8.
2. p(x)=47,8-47,8$e^{-0,175x}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> p(x)=47,8(1-$e^{-0,175x}$).

Partie 2, étude théorique

Question 1. a). Pour la fonction f définie par f(x) = 47,8(1 - e^(-0,175x)), prévoir son sens de variation.

Lorsque la hauteur x augmente, le terme $e^{-0,175x}$ diminue vers 0. Ainsi, le facteur $1-e^{-0,175x}$ augmente à partir de 0. La pression augmente donc avec la hauteur, tout en se rapprochant de la valeur limite 47,8 kPa. On prévoit que f est strictement croissante sur son domaine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

Question 1. b). Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f.

On dérive la fonction sur [0 ; +∞[. L'exponentielle est toujours positive, donc le signe de la dérivée est positif pour toute hauteur admise.

- f'(x)=47,8×0,175$e^{-0,175x}$=8,365$e^{-0,175x}$.
- Comme $e^{-0,175x}$>0, on a f'(x)>0.

La fonction est donc strictement croissante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f'(x)>0, donc f est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

Question 1. c). Démontrer que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 47,8.

Quand x tend vers +∞, le produit $-0,175x$ tend vers -∞, donc $e^{-0,175x}$ tend vers 0. Par conséquent, la fonction f tend vers 47,8. La courbe admet donc, en +∞, une asymptote horizontale d'ordonnée 47,8.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)=47,8$.

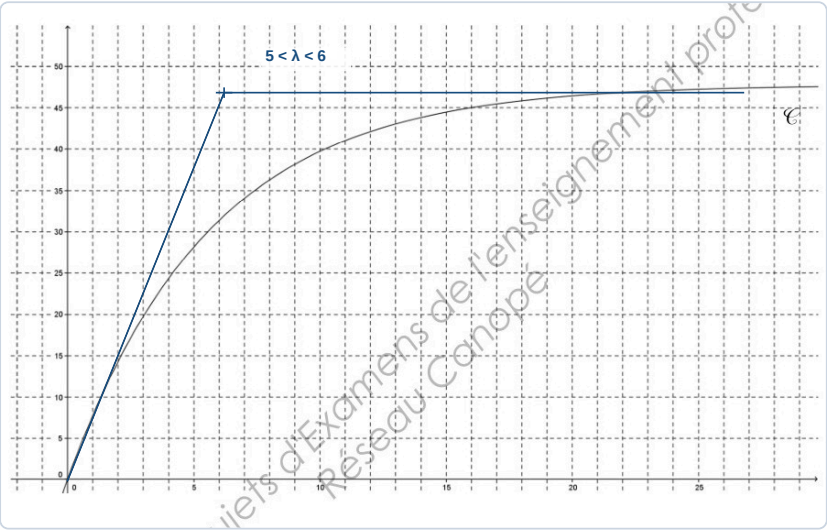
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale est y=47,8.

Partie 2, effet de voûte

Question 2. a). À l'aide de la courbe de f fournie en annexe, déterminer graphiquement un encadrement de λ par deux entiers consécutifs. λ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe en 0 et de son asymptote horizontale.

Sur l'annexe, on lit l'abscisse du point où la tangente en 0 rencontre l'asymptote horizontale, située à environ *y=47,8*. Cette intersection se place après la graduation 5 et avant la graduation 6. L'annotation indique la tangente, l'asymptote et l'encadrement demandé, sans remplacer la lecture graphique par le calcul de la question suivante.

Encadrement graphique de λ



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 5<λ<6.

Question 2. b). Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 passe par *(0 ; f(0))* et a pour coefficient directeur *f'(0)*. Or, *f(0)=0*, et la dérivée obtenue précédemment donne *f'(0)=47,8×0,175=8,365*. La tangente passe donc par l'origine avec ce coefficient directeur.

T : y=8,365x.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : y=8,365x.

Question 2. c). En déduire par le calcul une valeur approchée de λ à 10^-2 près.

À l'intersection de la tangente et de l'asymptote, les deux ordonnées sont égales. On résout donc $8{,}365\lambda = 47{,}8$. Le quotient obtenu est arrondi au centième, comme le demande l'énoncé. La hauteur est exprimée en mètres, car l'abscisse du graphique représente la hauteur de grains.

$$\lambda = 47{,}8 \div 8{,}365 \approx 5{,}71 \text{ m}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

λ≈5,71 m.

Partie 3

Question Calcul. Calculer la pression moyenne exercée sur le fond du silo lorsque la hauteur de grains varie entre 0 et 5 mètres, en utilisant la formule de la valeur moyenne rappelée dans le sujet.

Sur l'intervalle [0 ; 5], la valeur moyenne est $(1/5)\int_0^5 f(x)dx$. Une primitive de f est $47{,}8(x+e^{-0{,}175x}/0{,}175)$. En évaluant aux bornes puis en divisant par 5, on obtient la pression moyenne, arrondie au centième de kilopascal.

$$f_{moy} = (47{,}8/5)[5-(1-e^{-0{,}875})/0{,}175] \approx 15{,}94 \text{ kPa}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pression moyenne : environ 15,94 kPa.

2. Contrôle qualité des bouteilles en PET

Une entreprise fabrique des bouteilles en PET par injection, chauffage et soufflage, puis contrôle leur conformité et leur résistance. L'exercice porte sur une loi binomiale, une régression linéaire, une loi normale et un test bilatéral sur la charge moyenne de compression.

Partie 1

Question 1. On prélève au hasard un lot de 80 préformes, avec 0,5 % de préformes non conformes, et le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. Justifier que la variable X, qui compte les préformes non conformes du lot, suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

Chaque prélèvement constitue une épreuve de Bernoulli : le succès « préforme non conforme » a une probabilité constante de $0,5\% = 0,005$. Comme le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, les 80 épreuves sont indépendantes. La variable X compte le nombre de succès parmi ces 80 épreuves identiques. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,005$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80 ; 0,005)$, avec 80 épreuves indépendantes et une probabilité de non-conformité de 0,005.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un lot de 80 préformes contienne exactement une préforme non conforme.

Pour avoir exactement une préforme non conforme, il faut choisir sa position parmi les 80, puis que les 79 autres soient conformes. Les tirages étant indépendants, on applique la loi binomiale : $P(X = 1) = \binom{80}{1} \times 0,005 \times (1 - 0,005)^{79}$. Ainsi, $P(X = 1) = 80 \times 0,005 \times 0,995^{79} \approx 0,2692$. Il s'agit d'une probabilité d'environ 26,92 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 1) \approx 0,2692$, soit environ 26,92 %.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un lot de 80 préformes contienne au plus une préforme non conforme.

L'événement « au plus une préforme non conforme » regroupe exactement deux cas, sans chevauchement :

- aucune préforme non conforme : $P(X = 0) = 0,995^{80}$;
- une seule préforme non conforme : $P(X = 1) = 80 \times 0,005 \times 0,995^{79}$.

On additionne ces probabilités : $P(X \leq 1) = 0,995^{80} + 80 \times 0,005 \times 0,995^{79} \approx 0,9389$, soit environ 93,89 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X \leq 1) \approx 0,9389$, soit environ 93,89 %.

Partie 2

Question 1. À partir du tableau des jours et des pourcentages de bouteilles défectueuses, déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients à 10^-3.

Les six couples du tableau donnent $\bar{x} = 3,5$ et $\bar{y} = 1,5833$. La pente de la droite de régression de y en x est $a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{4,85}{17,5} \approx 0,277$. L'ordonnée à l'origine vaut $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 0,613$. Les deux coefficients sont arrondis au millième, comme demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La droite de régression est $y = 0,277x + 0,613$, coefficients arrondis au millième.

Question 2. En supposant que l'évolution du pourcentage de bouteilles défectueuses se poursuit de la même manière, estimer le pourcentage de bouteilles défectueuses produites le neuvième jour.

On estime le pourcentage du neuvième jour en prolongeant la droite de régression obtenue à partir des données des jours 1 à 6. Avec ses coefficients arrondis au millième, cette droite est $y = 0,277x + 0,613$. Pour le jour 9, on remplace donc x par 9 : $y(9) = 0,277 \times 9 + 0,613 = 3,106$. Comme y représente un pourcentage, l'estimation s'exprime en pourcentage.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour le neuvième jour, le pourcentage estimé de bouteilles défectueuses est de 3,106 %.

Partie 3

Question 1. La charge de compression C suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 1. En supposant m = 30, calculer la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard soit conforme, c'est-à-dire que sa charge de compression soit comprise entre 28 et 32 Newtons.

Pour $m = 30$, la charge suit une loi normale de moyenne 30 N et d'écart type 1 N. La conformité correspond à l'intervalle $[28 ; 32]$ N. En posant $Z = (C - 30)/1$, on obtient l'intervalle centré réduit $[-2 ; 2]$. La probabilité cherchée est donc $P(-2 \leq Z \leq 2) = 2\Phi(2) - 1$. Avec $\Phi(2) \approx 0,97725$, elle vaut environ 0,9545.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une bouteille soit conforme est d'environ 0,9545, soit 95,45 %.

Partie 3, test bilatéral

Question 2. a). Dans le test bilatéral au seuil de 5 % visant à déterminer si la charge moyenne de compression est égale à 30 Newtons, donner l'hypothèse alternative H1.

L'hypothèse nulle est $H_0 : m = 30$ N. Le test étant bilatéral, l'hypothèse alternative couvre les deux écarts possibles par rapport à cette valeur : la moyenne peut être inférieure ou supérieure à 30 N. Elle s'écrit donc $H_1 : m \neq 30$ N. On teste ainsi si la charge moyenne de la production diffère de 30 N.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $H_1 : m \neq 30$ N : la charge moyenne de la production est différente de 30 N.

Question 2. b). Sous l'hypothèse nulle H0 : m = 30, calculer le réel a tel que P(30 - a ≤ C̄ ≤ 30 + a) = 0,95.

Sous H_0, la moyenne $\overline{C}$ suit une loi normale de moyenne 30 N et d'écart type 0,1 N, comme indiqué pour les échantillons de 100 bouteilles. Une probabilité centrale de 0,95 correspond à l'intervalle centré réduit approximatif $[-1,96 ; 1,96]$. La demi-largeur recherchée est donc $a = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ N.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La demi-largeur recherchée est $a \approx 0,196$ N.

Question 2. c). Énoncer la règle de décision de ce test.

Le test au seuil de 5 % utilise l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0, soit $[30 - a ; 30 + a] = [29,804 ; 30,196]$ N. On compare la moyenne observée à ces deux bornes :

- si $29,804 \leq \overline{C} \leq 30,196$, on ne rejette pas H_0 ;
- si $\overline{C}$ est hors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $29,804 \leq \overline{C} \leq 30,196$ N ; la rejeter si la moyenne observée est hors de cet intervalle.

Question 2. d). Pour un échantillon de 100 bouteilles dont la charge moyenne de compression est de 29,4 Newtons, déterminer si l'on peut conclure, au seuil de 5 %, que la charge moyenne de l'ensemble de la production est égale à 30 Newtons.

La moyenne observée de l'échantillon est $29,4$ N. Elle est inférieure à la borne basse de l'intervalle de décision, $29,804$ N : son écart à cette borne est $29,4 - 29,804 = -0,404$ N. La valeur observée est donc hors de l'intervalle $[29,804 ; 30,196]$. D'après la règle du test bilatéral, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On rejette H_0 au seuil de 5 % : la charge moyenne de la production diffère significativement de 30 N.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2014)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS groupement C, session 2014, porte le code MATGRC et dure deux heures. Le coefficient dépend de la spécialité : il varie de 1 à 3. Les deux exercices étudient la pression dans un silo à grains et le contrôle de bouteilles en PET, en évaluant équations différentielles, fonctions, statistiques, probabilités et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- La valeur moyenne de f sur [a,b] est (1/(b-a)) ∫ de a à b f(x) dx.
- Le nombre de succès de n essais indépendants de probabilité p suit une loi binomiale B(n,p).
- Dans un test bilatéral, la moyenne observée se compare à l'intervalle d'acceptation défini sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour une loi binomiale, identifier le nombre d'essais, la probabilité de non-conformité et l'événement demandé.
- Calculer la régression de y en x, puis utiliser son équation pour estimer la valeur au neuvième jour.
- Justifier le sens de variation avec la dérivée et l'asymptote horizontale avec une limite.
- Pour le test, formuler H1, construire les bornes au seuil indiqué et comparer la moyenne observée à l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière de l'équation complète. La solution générale est leur somme. Une condition initiale permet ensuite de déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité d'avoir au plus une préforme non conforme ?

Pour X suivant une loi binomiale, on calcule P(X ≤ 1) = P(X = 0) + P(X = 1). Chaque probabilité se détermine avec les paramètres n et p de la loi.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les exercices, avancez d'abord sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Comment conclure le test bilatéral au seuil de 5 % ?

Comparez la moyenne observée aux bornes de l'intervalle calculé sous l'hypothèse nulle. Si elle est hors de l'intervalle, rejetez H0 au seuil de 5 %; si elle est dedans, ne rejetez pas H0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsdrb.fr/assets/annales/bts-drb/E3 - Mathématiques et Sciences physiques/2014/BTS DRB - E3 - Mathématiques et Sciences physiques - Session 2014 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Développement et Réalisation Bois : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.