Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS DRB

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsdrb.fr/assets/annales/bts-drb/E2 - Mathématiques/2022/BTS DRB - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée à l'aide d'une équation différentielle, des variations d'une fonction exponentielle, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Pour l'équation homogène, on applique la formule des solutions de **y' + ay = 0** : elles sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par sa valeur dans cette expression. Elle est définie sur l'intervalle considéré, soit $[0 ; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ et sa dérivée dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est égal au second membre pour tout t de l'intervalle. La fonction proposée vérifie donc bien l'équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

g(t) = 5 est une solution de y' + 0,8y = 4.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. À cette solution, on ajoute toutes les solutions de l'équation homogène, obtenues à la question 1.a. Ainsi, chaque solution s'écrit comme la somme de 5 et d'une fonction exponentielle de la forme $ke^{-0,8t}$, où k est réel.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la solution générale, $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À $t = 0$, l'exponentielle vaut 1. La condition initiale impose donc $k + 5 = 20$, d'où $k = 20 - 5 = 15$. En reportant cette constante dans l'expression générale, on obtient la fonction de vitesse demandée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.**

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

Pour tout $t \geq 0$, on a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers -∞. Or l'exponentielle d'une quantité qui tend vers -∞ tend vers 0. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0 et la fonction tend vers 5.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.**

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de celle-ci.

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une limite finie à l'infini. D'après la question précédente, cette limite vaut 5 quand t tend vers +∞. L'asymptote est donc la droite horizontale située à l'ordonnée 5. Elle décrit la valeur vers laquelle la courbe se rapproche, sans que la fonction ait besoin de l'atteindre.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **Asymptote horizontale : $y = 5$.**

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en +∞ vaut 5.

t	0	+∞
f'(t)	–	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur [0 ; +∞[.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse est strictement décroissante, mais elle tend vers $5\ m{\cdot}s^{-1}$, une valeur positive. Elle reste donc supérieure à 5 pour tout temps fini et ne devient jamais nulle. Le freinage ralentit le chariot, mais ne permet pas son arrêt selon le modèle donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers 5 $m{\cdot}s^{-1}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme donne $-18{,}75 \times (-0{,}8)e^{-0{,}8t} = 15e^{-0{,}8t}$. La dérivée du second terme est 5. On obtient donc $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$ sur l'intervalle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

F'(t) = f(t), donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de f entre 0 et 1. Avec la primitive fournie, $d = F(1) - F(0)$. On calcule $F(1) = -18{,}75e^{-0{,}8} + 5$ et $F(0) = -18{,}75$, d'où $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$. L'arrondi au centimètre s'exprime à deux décimales en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir la proposition qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : *20 - 12t + (24/5)t²*. Parmi les propositions, la troisième reprend ces trois termes, puisque *24/5 = 4,8*. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste peut s'écrire *t²ε(t)*, avec *ε(t)* qui tend vers 0 lorsque *t* tend vers 0. C'est donc cette proposition qu'il faut choisir.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$**, avec** $\varepsilon(t) \to 0$**.**

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur *f'(0)*. À partir de l'expression donnée, *f'(0) = -12e^0 = -12*. Elle passe par le point de la courbe d'abscisse 0, soit *(0 ; f(0)) = (0 ; 20)*. En utilisant la forme point-pente, on obtient son équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$**.**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

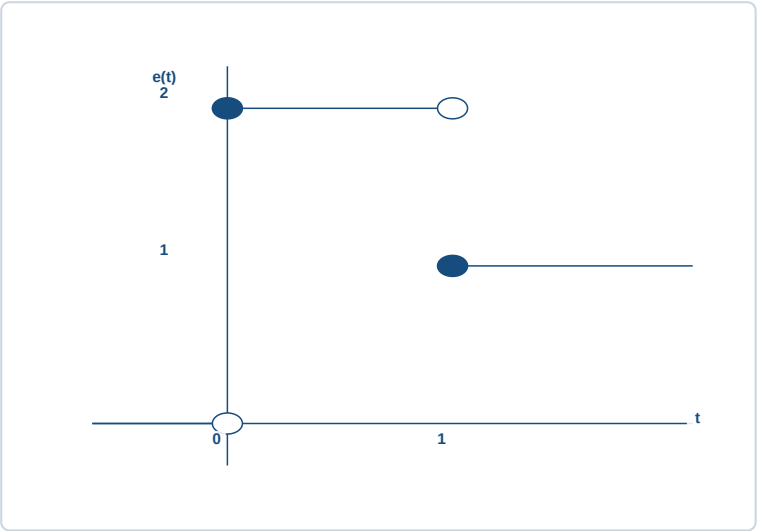
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'étude utilise les transformées de Laplace pour déterminer puis représenter le signal d'entrée et le signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il est nul pour $t<0$. Puis $e(t)=2$ pour $0\leq t<1$ et $e(t)=1$ pour $t\geq 1$. Les valeurs aux instants de saut sont déterminées par U(0)=1.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t)=0$ si $t<0$, $e(t)=2$ si $0\leq t<1$, et $e(t)=1$ si $t\geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\}=1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\}=e^{-p}/p$. On transforme les deux termes de l'expression de $e(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p)=\frac{2-e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^(-p)/[p(p + 1)].

La relation entrée-sortie donne $S(p)=H(p)E(p)$. En substituant les expressions de l'énoncé :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons au même dénominateur les deux fractions du membre de droite :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Les deux transformées retardées s'obtiennent par translation d'une unité, avec le facteur causal $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On décompose $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. L'inverse du premier groupe donne l'expression cherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis au dixième près.**

À partir de l'expression valable pour $t \geq 1$, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est environ 1,264, soit 1,3 au dixième près.

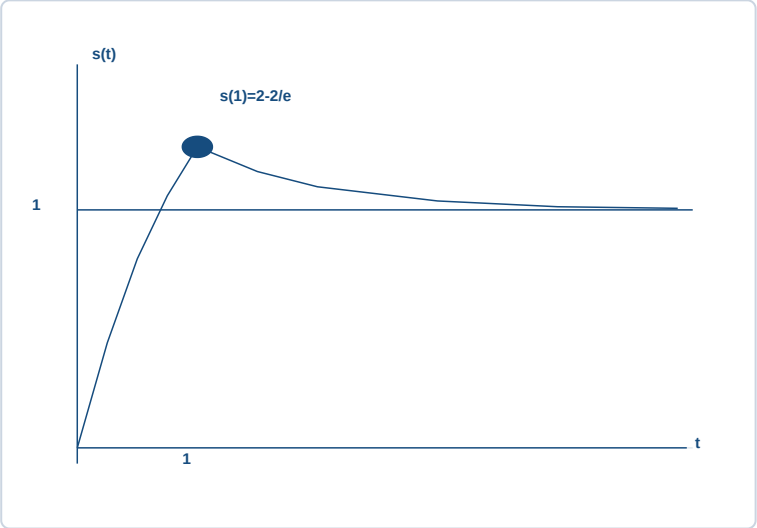
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3.$$

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1-e^{-t})$ et atteint $s(1) = 2 - 2/e \approx 1,264$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$, décroît et tend vers 1. Les deux expressions coïncident à $t = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe part de 0, croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroît vers 1.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel s'annule donc à la limite.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Son coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot par une fonction exponentielle et la réponse d'un système électrique avec les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' + ay = b, ajouter une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, alors f(t) tend vers 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t)dt.
- Le retard f(t - a)U(t - a) correspond en transformée de Laplace à F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Résoudre d'abord l'équation homogène, ajouter une solution particulière, puis appliquer la condition initiale.
- Une vitesse qui tend vers 5 m/s ne tend pas vers zéro : le modèle ne prévoit donc pas l'arrêt du chariot.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes et arrondir selon la précision demandée.
- Vérifier le facteur exponentiel lié au retard et respecter les intervalles utilisés pour décrire le signal de sortie.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du premier exercice ?

Résolvez d'abord y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de y' + 0,8y = 4. Utilisez ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter ?

Pour que le chariot s'arrête selon ce modèle, sa vitesse devrait tendre vers zéro. Or f(t) = 15e^(-0,8t) + 5 tend vers 5 m/s : elle reste donc strictement positive à long terme.

Q : Comment organiser le temps entre les deux exercices ?

L'épreuve dure deux heures et chaque exercice vaut 10 points. Une répartition équilibrée du temps laisse une marge pour les tracés, les calculs et la vérification des réponses, notamment des unités et des arrondis.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour les tracés de l'exercice 2 ?

Le sujet demande de tracer e(t), puis de compléter la courbe de s(t), sur le document-réponse à rendre avec la copie. Indiquez clairement les axes, les valeurs avant et après t = 1 et l'allure de la sortie.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsdrb.fr/assets/annales/bts-drb/E2 - Mathématiques/2022/BTS DRB - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Développement et Réalisation Bois : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.